Chapitre 4

ARITHMÉTIQUE

► SOUVENONS-NOUS !

Pour chaque question, une ou plusieurs réponses peuvent être correctes.

① Un client a oublié son code. Il se souvient seulement que le nombre formé de trois chiffres est plus grand que 400 et plus petit que 500 et que ce nombre est à la fois multiple de 9 et de 5.
Quelle est ou quelles sont les propositions vraies dans la liste suivante ?

A. Le code peut être 485.
B. Le code peut être 450.
C. Le nombre est un multiple de 45.
D. Il n'y a que trois solutions.

② Quel est le nombre de diviseurs de 99 ?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6

③ Quel est ou quels sont les nombres qui admettent exactement 3 diviseurs ?

A. 3 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 12 **E.** 16

④ Quel est le nombre de diviseurs de 101 ?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6

⑤ Sans utiliser de calculatrice ni de division posée, quel est ou quels sont les nombres divisibles par 4 ?

A. 54298 **B.** 108932 **C.** 275476 **D.** 33934 **E.** 428580

⑥ Sans utiliser de calculatrice ni de division posée, combien y a t-il de nombre(s) divisible(s) par 6 dans la liste suivante ?

6 ; 34 ; 46 ; 726 ; 2310 ; 4440.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

► SAVOIRS DE BASE

A Multiples et diviseurs

Soient a et b deux entiers naturels.
S'il existe un entier naturel k tel que $\boldsymbol{a = kb}$ on dit que : **a est un multiple de b**
ou que **b est un diviseur de a**
ou que **a est divisible par b**
ou que **b divise a**.

Remarques k est le quotient exact de a par b.
0 est multiple de tout entier naturel a.
Tout entier naturel a ($a > 1$) admet au moins 2 diviseurs : 1 et a.

Exemple
Recherche de tous les diviseurs de 96 : $\longrightarrow$

1	2	3	4	6	8
96	48	32	24	16	12

La disposition en tableau à deux lignes permet
d'écrire deux par deux les diviseurs (1 ; 96) (2 ; 48) etc.

Comment résoudre dans N^2 une équation du type $xy = a$?

Exemple Résoudre dans N^2 l'équation $xy = 70$.

Solution
Cherchons tous les diviseurs de 70 : $\longrightarrow$

1	2	5	7
70	35	14	10

Les solutions de l'équation $xy = 70$ sont les 8 couples :

$$\boxed{(1 ; 70)\ \ (70 ; 1)\ \ (2 ; 35)\ \ (35 ; 2)\ \ (5 ; 14)\ \ (14 ; 5)\ \ (7 ; 10)\ \ (10 ; 7)}$$

Principaux critères de divisibilité

Un nombre entier est :

divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.

divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
divisible par 25 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25.

divisible par 11 si la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair est un multiple de 11 (0 ; 11 ; 22…).

divisible par 12 s'il est divisible **à la fois** par 4 et par 3 car 4 et 3 sont **premiers entre eux** (voir ci-après).

$\boxed{B}$ Nombres premiers

Dire qu'un entier naturel est premier signifie qu'il admet exactement deux diviseurs distincts (1 et lui-même).

Attention ! 0 n'est pas premier (une infinité de diviseurs).
1 n'est pas premier (un seul diviseur).
2 est le plus petit nombre premier et le seul qui soit pair.

Les dix premiers nombres premiers à connaître… (ils sont inférieurs à 30).

$\boxed{\mathbf{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29\ldots}}$

Comment savoir si un nombre est premier ?

Exemple Les nombres 221 et 277 sont-ils des nombres premiers ?

Solution Pour savoir si un nombre P est premier, il n'y a pas d'autres méthodes que d'essayer de le diviser par des nombres premiers plus petits que $\sqrt{\text{P}}$.

221 n'est pas divisible par 2, par 3, par 5, par 7, par 11,
par contre il est divisible par 13 : $221 = 13 \times 17$ $\boxed{\text{221 n'est pas premier}}$

277 n'est pas divisible par 2, par 3, par 5, par 7, par 11, par 13 , par 17,
or $17^2 = 289$ dépasse 277 donc : $\boxed{\text{277 est premier}}$

Savoir décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers
Comment en déduire le nombre de diviseurs de cet entier naturel ?

Exemples Décomposer 75 et 1176 en produit de facteurs premiers.
En déduire le nombre de diviseurs de 75 et de 1176.

Solution

$75 = \mathbf{3}^{\mathbf{1}} \times \mathbf{5}^{\mathbf{2}}$

$(\mathbf{1} + 1) \times (\mathbf{2} + 1) = 6$

Le nombre de diviseurs de 75 est **6**.

Disposition pratique

75	3
25	5
5	5
1	

$1176 = \mathbf{2}^{\mathbf{3}} \times \mathbf{3}^{\mathbf{1}} \times \mathbf{7}^{\mathbf{2}}$

$(\mathbf{3} + 1) \times (\mathbf{1} + 1) \times (\mathbf{2} + 1) = 24$

Le nombre de diviseurs de 1176 est **24**.

Disposition pratique

1176	2
588	2
294	2
147	3
49	7
7	7
1	

Si la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel N s'écrit $a^p \times b^q \times c^r$ alors, le nombre de diviseurs de N est égal à $(p + 1)(q + 1)(r + 1)$.

C PGCD et nombres premiers entre eux

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément.
On le note **PGCD (a ; b).** **PGCD = P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur

Exemples PGCD (21 ; 35) = 7 PGCD (15 ; 22) = 1 PGCD (20 ; 5) = 5

Nombres premiers entre eux

On dit que deux entiers a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Exemples 15 et 22 sont premiers entre eux.
21 et 35 ne sont pas premiers entre eux.

Important ! Pour démontrer qu'un entier est divisible par 12, il suffit de prouver qu'il est divisible par 3 et par 4 car 3 et 4 sont premiers entre eux (et non pas par 2 et par 6 car 2 et 6 ne sont pas premiers entre eux).

Savoir déterminer le PGCD de deux entiers naturels

Exemple Déterminer le PGCD des deux entiers 702 et 273.

Méthode 1 On écrit la liste des diviseurs de chaque nombre :

Les diviseurs de 702 : $\longrightarrow$

1	2	3	6	9	13	18	27
702	351	234	117	78	54	**39**	26

Les diviseurs de 273 : $\longrightarrow$

1	3	7	13
273	91	**39**	21

On repère le plus grand des diviseurs communs dans les deux listes :
PGCD (702 ; 273) = $\boxed{39}$

Remarque Cette méthode 1 est particulièrement longue lorsqu'un des nombres (ou les deux) possèdent de nombreux diviseurs. La méthode 2 est alors préférable.

Méthode 2 On décompose chaque entier en facteurs premiers :

$702 = 2 \times 3^3 \times 13$ $273 = 3 \times 7 \times 13$ PGCD (702 ; 273) = $3 \times 13 = \boxed{39}$

Le PGCD est composé des facteurs premiers communs aux deux nombres auxquels on affecte à chacun le plus petit exposant.

Les diviseurs communs de deux entiers naturels sont les diviseurs de leur PGCD.

Exemple Les diviseurs communs de 702 et 273 sont les diviseurs de leur PGCD : 39.
Les diviseurs communs de 702 et 273 sont donc : {1, 3, 13, 39}

Exercices Chapitre 4

Multiples et diviseurs

Exercice 1

Mettre une croix dans chaque case où la réponse est OUI.

est divisible par ↓	361	396	453	610	726	981	1485	5024	5168	6360
2										
3										
4										
5										
6										
9										
12										

Exercice 2

1. Sans utiliser de calculatrice ni de division posée, indiquer, parmi la liste des cinq nombres proposés, celui ou ceux qui sont divisibles par 15.

345 ; 445 ; 455 ; 485 ; 625.

2. Sans utiliser de calculatrice ni de division posée, indiquer, parmi la liste des cinq nombres proposés, celui ou ceux qui sont divisibles par 12.

4032 ; 12660 ; 47352 ; 524490 ; 730612.

Exercice 3

A, B, C, D, E, F sont des nombres entiers naturels écrits ci-dessous en base dix (a désigne donc un chiffre qui, éventuellement, peut être répété dans le nombre).

A = 10a4 B = 34a C = a4324 D = a18 E = 314aa F = a353a

Pour chacun des nombres A, B, C, D, E, F, trouvez le chiffre a, quand cela est possible, de telle sorte que le nombre correspondant soit un multiple de 4.

Exercice 4

1. Trouver tous les diviseurs du nombre 255.

2. Trouver tous les entiers naturels a et b tels que la différence de leurs carrés soit égale à 255.